Szpirglas
Isenmann (devs)

Leçon 181 : Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.

On considère $\mathcal{E}$ un espace affine réel de dimension n et de direction E.

I _ Notion de barycentre

1. Définition et premières propriétés

Proposition - Définition 1.1 Soient I un ensemble fini, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de points de $\mathcal{E}$ et $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de réels. On considère l'application $\Phi : M \longmapsto \sum_{i\in I} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \Phi(N) + (\sum_{i\in I}\lambda_i)\overrightarrow{MN}$. Alors :

(i) si $\sum_{i\in I}\lambda_i = 0$ alors $\sum_{i\in I}\lambda_i\overrightarrow{MA_i}$ est indépendant de M

(ii) sinon, il existe un unique point G, appelé barycentre de la famille de points pondérés $((A_i,\lambda_i))_{i\in I}$ vérifiant $\Phi(G) = \vec{0}$.

Proposition 1.2 Le barycentre G d'un système de points pondérés $((A_i,\lambda_i))_i$ est caractérisé par chacune des propriétés suivantes :

- $\sum_i \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$
- $\exists M \in \mathcal{E},\ \sum_i \lambda_i\overrightarrow{MA_i} = (\sum_i\lambda_i)\overrightarrow{MG}$
- $\forall M\in\mathcal{E},\ \sum_i\lambda_i\overrightarrow{MA_i} = (\sum_i \lambda_i)\overrightarrow{MG}$

Lemme 1.3 (homogénéité) Soit $\lambda\in\mathbb{R}^*$ alors $\mathrm{Bar}((A_i,\lambda_i)_i) = \mathrm{Bar}((A_i,\lambda\lambda_i)_i)$.

Conséquence 1.4 On peut toujours supposer $\sum_{i\in I}\lambda_i = 1$.

Théorème 1.5 (associativité des barycentres) Soient I fini, $(A_i,\lambda_i)_{i\in I}$ famille de points pondérés et $(I_1,\dots,I_k)$ partition de I. Pour tout $j\in[\![1,k]\!]$, on note $\Lambda_j = \sum_{i\in I_j}\lambda_i \neq 0$. Alors $\mathrm{Bar}((A_i,\lambda_i)_{i\in I}) = \mathrm{Bar}((G_j,\Lambda_j)_{j\leq k})$ où G_j est le barycentre de $(A_i,\lambda_i)_{i\in I_j}$.

Définition 1.6 L'isobarycentre de p points $A_1,\dots,A_p$ de $\mathcal{E}$ est le barycentre de la famille $((A_i,1))_{i\in[\![1,p]\!]}$. On le note $\mathrm{Isobar}(A_1,\dots,A_p)$.

Exemple 1.7

l'isobarycentre de deux points A,B est le milieu de $[AB]$

l'isobarycentre d'un polygone est son centre

Application 1.8 Soit P_0 un polygone à n sommets $A_1,\dots,A_n$. On définit par récurrence une suite de polygones $(P_k)_k$ où P_{k+1} sont les milieux des côtés de P_k. Alors $(P_k)_k$ converge vers l'isobarycentre de P_0. développement 1

2. Coordonnées barycentriques

Proposition 1.9 L'ensemble des barycentres des points $A_1,\dots,A_p$ est le sous-espace affine $\mathrm{Aff}(A_1,\dots,A_p)$ engendré par ces points.

Proposition 1.10 Si la famille $(A_1,\dots,A_p)$ est affinement indépendante, alors un point de $\mathrm{Aff}(A_1,\dots,A_p)$ s'écrit de manière unique comme barycentre de $(A_1,\dots,A_p)$.

Définition 1.11 Soit $(A_0,\dots,A_n)$ une base affine de $\mathcal{E}$. Tout point $M\in\mathcal{E}$ s'écrit de manière unique comme $M = \mathrm{Bar}((A_i,\lambda_i))$ avec $\sum_{i=0}^n\lambda_i = 1$.

La famille $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$ est les coordonnées barycentriques de M dans $(A_0,\dots,A_n)$.

Proposition 1.12 Soient $(A_0,\dots,A_n)$ base affine de $\mathcal{E}$ et $(B_0,\dots,B_n)$ famille de $\mathcal{E}$ avec $B_i = \mathrm{Bar}((A_k,\lambda_k^{(i)})_k)$. Alors $(B_0,\dots,B_n)$ est une base affine si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix}\lambda_0^{(0)} & \cdots & \lambda_0^{(n)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_n^{(0)} & \cdots & \lambda_n^{(n)}\end{vmatrix}$ est non nul.

Proposition 1.13 Soient $(A_0,\dots,A_n)$ et $(B_0,\dots,B_n)$ deux bases affines de $\mathcal{E}$. On suppose que $B_i = \mathrm{Bar}((A_k,\lambda_k^{(i)})_k)$. Si $M = \mathrm{Bar}((B_i,\mu_i)_i)$ alors les coordonnées barycentriques $(\lambda_0,\dots,\lambda_n)$ de M dans $(A_0,\dots,A_n)$ sont données par :

$$\begin{pmatrix}\lambda_0\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_0^{(0)} & \cdots & \lambda_0^{(n)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_n^{(0)} & \cdots & \lambda_n^{(n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_0\\ \vdots\\ \mu_n\end{pmatrix}$$

II _ Notion de convexité

On suppose ici que E est muni d'une norme $\|.\|$.

1. Ensembles convexes

Définition 2.1 Une combinaison convexe de points $P_0, \dots, P_k$ de $\mathcal{E}$ est un barycentre de ces points affectés de poids positifs.

Définition 2.2 Une partie C de $\mathcal{E}$ est dite convexe si et seulement si tout segment d'extrémités dans C est contenu dans C.

Proposition 2.3 Une partie C est convexe si et seulement si elle est stable par combinaison convexe.

Exemples 2.4
- les convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles
- un sous-espace affine est convexe
- un ellipsoïde de $\mathcal{E}$ est convexe

Application Pour $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, on note $q_S : x \mapsto {}^t x S x$ et $E_S := \{x \mid q_S(x) \leq 1\}$.

Proposition 2.5 Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ alors $\mathrm{Vol}(E_S) = \mu(S)\,\mathrm{Vol}(B)$ où $\mu : M \mapsto (\det M)^{-1/2}$ et $B = \overline{B}_{\mathbb{R}^n}(0,1)$.

Proposition 2.6 La fonction μ est strictement convexe sur $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème 2.7 (John - Loewner) Soit K un compact d'intérieur non vide de $\mathbb{R}^n$. Il existe un unique ellipsoïde centré en 0 contenant K.

développement 2

Proposition 2.8 Toute boule de $\mathcal{E}$ est convexe.

Proposition 2.9 L'image d'un convexe par une application affine est convexe.

2. Enveloppe convexe

Proposition 2.10 Une intersection quelconque de convexes est convexe.

Proposition - Définition 2.11 Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{E}$. Alors l'intersection de tous les convexes contenant $\mathcal{A}$ est le plus petit convexe contenant $\mathcal{A}$.
Cet ensemble est appelé enveloppe convexe de $\mathcal{A}$ et noté $cv(\mathcal{A})$.

Exemples 2.12
- l'enveloppe convexe de $\{A,B\}$ est $[AB]$
- l'enveloppe convexe de $\{A,B,C\}$ est le triangle ABC où A,B,C non alignés

Proposition 2.13 Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{E}$. Alors $cv(\mathcal{A})$ est l'ensemble des combinaisons convexes de points de $\mathcal{A}$.

3. Points extremaux

La recherche d'une partie la plus petite possible dont l'enveloppe convexe est un convexe donné conduit à la notion de point extremal.

Soit C une partie convexe de $\mathcal{E}$.

Définition 2.14 Un point M de C est dit extrémal si M n'est pas le milieu de deux points distincts de C.

Exemple 2.15
le centre d'un carré n'est pas un point extrémal mais ses sommets le sont

Lemme 2.16 Les points extrémaux d'un polygone convexe sont exactement ses sommets.

Proposition 2.17 Pour un point M de C, il y a équivalence entre les assertions :
- le point M est extrémal
- le point M n'est pas contenu dans un segment d'extrémités dans C distinctes de M
- le point M n'est pas combinaison convexe de points de C distincts de M
- l'ensemble $C \setminus \{M\}$ est convexe